S.D.Ü. Mühendislik- Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü

Matematik II Dersi Final Sınavı A Şubesi (I.-II. Öğretim)

SORU 1: Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+\sin x}$ **b)** $\int \frac{dx}{(2+x^2)^2}$

CEVAP 1:

a) $\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$ integralinde $\tan \frac{x}{2} = t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x\,(1+\sin x)} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}dt \\
&= \int \frac{1+t^2}{t\,(t^2+2t+1)}dt \\
&= \int \frac{1+t^2}{t\,(t+1)^2}dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)dt \\
&= \ln|t| + \frac{2}{t+1} + c \\
&= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1} + c
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

b) $\int \frac{dx}{(2+x^2)}$ integralinde $u = \frac{1}{2+x^2}$, $dv = dx$ alınıp kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2+x^2)} &= \frac{x}{2+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(2+x^2)^2}dx \\
&= \frac{x}{2+x^2} + 2\int \frac{x^2+2-2}{(2+x^2)^2}dx \\
&= \frac{x}{2+x^2} + 2\int \frac{x^2+2}{(2+x^2)^2}dx - 4\int \frac{dx}{(2+x^2)^2}
\end{aligned}$$

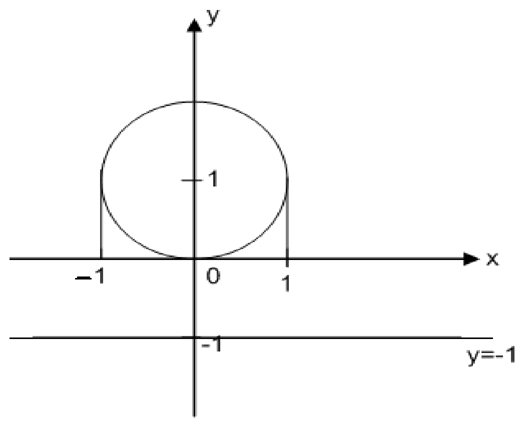
bulunur. Buradan $\int \frac{dx}{(2+x^2)^2}$ integrali çekilirse,

$$\begin{aligned}
4\int \frac{dx}{(2+x^2)^2} &= \frac{x}{2+x^2}+\int \frac{dx}{x^2+2} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2+x^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\right]+c \\
&= \frac{x}{4(2+x^2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+c
\end{aligned}$$

bulunur.

SORU 2: $x^2+(y-1)^2=1$ çemberinin $y=-1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz. (Grafiğini de çiziniz).

CEVAP 2:



Çemberin üst ve alt yarılarının denklemleri sırasıyla

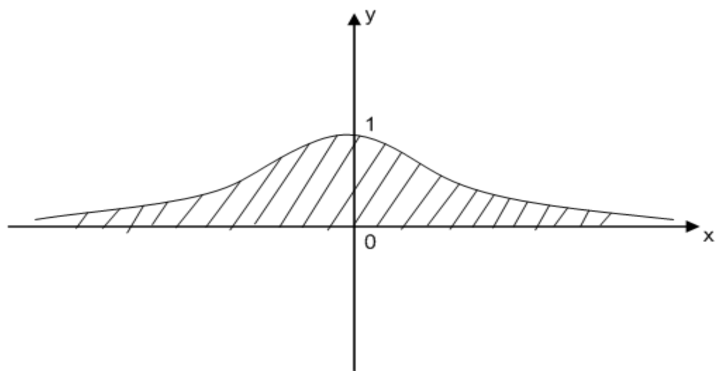
$$y=1+\sqrt{1-x^2}\ \ ,\ \ y=1-\sqrt{1-x^2}$$

dir. Söz konusu olan bu çember parçalarının $y=-1$ doğrusu etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeylerin alanları toplamıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_{-1}^{1}\left|1+\sqrt{1-x^2}+1\right|\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx+2\pi\int_{-1}^{1}\left|1-\sqrt{1-x^2}+1\right|\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}dx \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\left(2+\sqrt{1-x^2}+2-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= 8\pi\arcsin x\,\big|_{-1}^{1}=8\pi\cdot\pi=8\pi^2\quad br^2\quad \text{bulunur.}
\end{aligned}$$

SORU 3: $y = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisiyle Ox- ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz. (Grafiğini de çiziniz).

CEVAP 3:

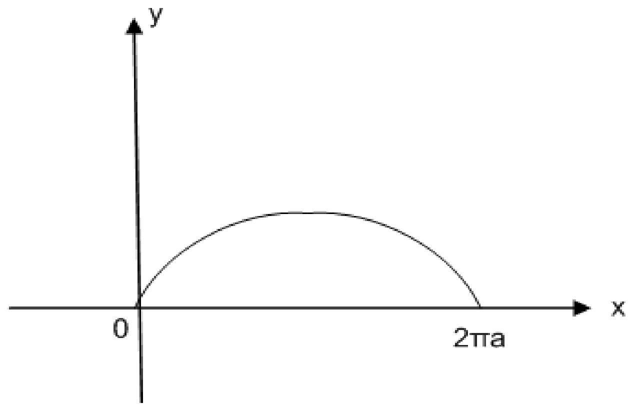


$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \arctan x \,|_t^0 + \lim_{s\to\infty} \arctan x \,|_0^s \\
&= \lim_{t\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan t) + \lim_{s\to\infty} (\arctan s - \arctan 0) \\
&= 0 - \left(\frac{-\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi \quad br^2
\end{aligned}
$$

bulunur.

SORU 4: $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ eğrisinin bir yayının ağırlık merkezini bulunuz. (Grafiğini de çiziniz).

CEVAP 4:



$x = a(t - \sin t)$ ve $y = a(1 - \cos t)$ için,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x')^2 + (y')^2} &= \sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + (a \sin t)^2} \\
&= \sqrt{2a^2 (1 - \cos t)} \\
&= \sqrt{2a^2 \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)} \\
&= 2a \sin \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

olacağından,

$$l = \int\limits_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left(-2 \cos \frac{t}{2}\right) |_0^{2\pi} = 8a$$

birim olur. Ayrıca $\sigma = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{dm}{dl} &= \sigma \Longrightarrow dm = dl \\
&\Longrightarrow \int dm = \int dl \\
&\Longrightarrow m = l
\end{aligned}$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
M_y &= \int\limits_0^{2\pi} x dl = \int\limits_0^{2\pi} a(t - \sin t) 2a \sin \frac{t}{2} dt \\
&= 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} t \sin \frac{t}{2} dt - 4a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt
\end{aligned}$$

Burada birinci ifade için

$$\begin{aligned}
u &= t \ , \ du = dt \\
\sin \frac{t}{2} dt &= dv \ , \ -2 \cos \frac{t}{2} = v
\end{aligned}$$

şeklinde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$M_y = -4a^2 t\cos\frac{t}{2} + \int\limits_0^{2\pi} \cos\frac{t}{2}dt - 4a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt$$

olur. Burada da $\frac{t}{2} = u$, $dt = 2du$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} M_y &= -4a^2 t\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\,|_0^{2\pi} - 4a^2\left(\frac{2}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right)|_0^{2\pi} \\ &= -4a^2 2\pi\cos\pi + \sin\pi + 0 \\ &= 8a^2\pi \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned} M_x &= \int\limits_0^{2\pi} y\,dl = \int\limits_0^{2\pi} a\left(1-\cos t\right)2a\sin\frac{t}{2}dt \\ &= 2a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos t\right)2a\sin\frac{t}{2}dt \\ &= 2a^2\int\limits_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt \\ &= 4a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt \\ &= 4a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt - 4a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt \\ &= -8a^2\cos\frac{t}{2}\,|_0^{2\pi} + 4a^2\left(\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)|_0^{2\pi} \\ &= 16a^2 - \frac{16a^2}{3} = \frac{32a^2}{3} \end{aligned}$$

birim bulunur. O halde,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{l} = \frac{8a^2\pi}{8a} = \pi a$$

ve

$$\bar{y} = \frac{M_x}{l} = \frac{\frac{32a^2}{3}}{8a} = \frac{4a}{3}$$

olur ve böylece ağırlık merkezi

$$\left(\pi a, \frac{4a}{3}\right)$$

noktası olarak bulunur.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 80 dakikadır.

SDÜ MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ B-ŞUBESİ
GENEL MATEMATİK-II
FİNAL SINAVI
8 HAZİRAN 2011

ÇÖZÜMLER

AD-SOYAD:
ÖĞRENCİ NO:
ÖĞRETİM:

- **Bu final sınavı iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde integrasyon bilginiz ve ikinci bölümde ise integral uygulamaları beceriniz test edilecektir.**
- **UYARI: İlk bölümden alabileceğiniz toplam puanın %50'den daha az puan aldığınız takdirde, ikinci bölümdeki çözümleriniz dikkate alınmayacaktır.**
- **Bu sınavda hesap makinesi veya benzer elektronik hesaplayıcılar kullanılamaz.**
- **Her çözüm için işlemlerin açık bir şekilde ifade edilmesi gerekir. İşlemsiz sonuçlara puan verilemez.**
- **Bu final sınav kitapçığı toplam (3 soru) 4 sayfadan oluşmaktadır.**
- **İlk bölüm için toplam süreniz 35 dk. ve ikinci bölüm için 40 dk dır.**

Başarılar... Yusuf Civan

BÖLÜM-I—-SORULAR—-

Soru 1. *Aşağıdaki integralleri hesaplayınız? (*$5 \times 10 = 50$ **PUAN.***)*

1-) $\int \frac{cos^2(lnx)}{x}dx = ?$
$u = lnx \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx$ *alırsak:*

$$\begin{aligned}\int \frac{cos^2(lnx)}{x}dx &= \int cos^2 u du = \int \frac{1+cos2u}{2}du,\\ &= \frac{1}{2}[\int du + \int cos2udu] = \frac{1}{2}[u + \frac{1}{2}sin2u] + c,\\ &= \frac{1}{2}lnx + \frac{1}{4}sin(lnx^2) + c.\end{aligned}$$

2-) $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx = ?$
$e^x = sin\theta \Longrightarrow dx = cot\theta d\theta$ *alırsak:*

$$\begin{aligned}\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx &= \int sin\theta\sqrt{1-sin^2\theta}cot\theta d\theta,\\ &= \int cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sin(2\theta) + c,\\ &= \frac{1}{2}arcsin(e^x) + \frac{1}{2}e^x\sqrt{1-e^{2x}} + c.\end{aligned}$$

3-) $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = ?$
$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$ *olduğundan:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx,$$
$$= lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx + lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x^2}dx,$$
$$= lim_{a\to-\infty}[-\frac{1}{2}e^{-x^2}|_a^0 + lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{2}e^{-x^2}|_0^b,$$
$$= lim_{a\to-\infty}[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-a^2}] + lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}],$$
$$= 0$$

4-) $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = ?$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x}{x^2+x+1}dx + \int \frac{1}{x^2+x+1}dx,$$
$$= \int \frac{x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx + \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx, \quad u = x+\frac{1}{2},\ du = dx$$
$$= \int \frac{u-\frac{1}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}du + \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du,$$
$$= \int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}du - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du + \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du, \quad t = u^2+\frac{3}{4}, dt = 2udu,$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}du,$$
$$= ln\sqrt{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{3}arctan\frac{2u}{\sqrt{3}} + c,$$
$$= ln\sqrt{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + c.$$

5-) $\int \frac{(arctanx)^2[ln(arctanx)]^2}{1+x^2}dx = ?$
$t = arctanx \Longrightarrow dt = \frac{1}{x^2+1}dx$ *alırsak:*

$$\int \frac{(arctanx)^2[ln(arctanx)]^2}{1+x^2}dx = \int t^2[lnt]^2dt, \quad r = lnt, dr = \frac{1}{t}dt \Longrightarrow e^r = t, e^r dr = dt,$$
$$= \int r^2e^{3r}dr = \frac{1}{3}r^2e^{3r} - \frac{2}{9}re^{3r} + \frac{2}{27}e^{3r} + c,$$
$$= \frac{1}{3}(lnt)^2t^3 - \frac{2}{9}(lnt)^2t^3 + \frac{2}{27}t^3 + c,$$
$$= \frac{1}{3}(ln(arctanx))^2(arctanx)^3 - \frac{2}{9}(ln(arctanx))^2(arctanx)^3,$$
$$+ \frac{2}{27}(arctanx)^3 + c.$$

BÖLÜM-II—-SORULAR——

AD-SOYAD:
ÖĞRENCİ NUMARASI:
ÖĞRETİM:

Soru 2. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ *eğrisi veriliyor.*

a-) *Bu eğrinin* $1 \leq x \leq 2$ *aralığında kalan kısmının yay uzunluğunu hesaplayınız.* *(*10 **PUAN.)**

$y' = \frac{4x^4-1}{4x^2} \implies 1 + (y')^2 = \frac{(4x^4+1)^2}{(4x^2)^2} \implies \sqrt{1+(y')^2} = \frac{4x^4+1}{4x^2}$ **olduğundan: yay uzunluğu:**

$$YU = \int_1^2 \sqrt{1+(y')^2}dx = \int_1^2 \frac{4x^4+1}{4x^2}dx = \int_1^2 (x^2 + \frac{1}{4x^2})dx,$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x}|_1^2 = (8/3 - 1/8) - (1/3 - 1/4) = 59/24.$$

b-) Bu eğrinin $1 \leq x \leq 2$ **aralığında kalan kısmının** $x = 0$ **doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanını hesaplayınız.(**15 **PUAN.)**

$$YA = 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1+(y')^2}dx = 2\pi \int_1^2 x\frac{4x^4+1}{4x^2}dx = 2\pi \int_1^2 (x^3 + \frac{1}{4x})dx,$$

$$= 2\pi[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{4}lnx|_1^2 = 2\pi[(4 + \frac{1}{4}ln2) - (\frac{1}{4} - 0)],$$

$$= 2\pi[\frac{15}{4} + \frac{1}{4}ln2] = \frac{15 + ln2}{2}\pi.$$

Soru 3. R *ile* $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ *eğrileri ve* $x = 1$ *doğrusu tarafından sınırlandırılan bölgeyi gösterelim.*

a-) *R'nin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız?(*10 **PUAN.)**

Her hangi bir $x \in [0,1]$ **için** $R(x) = e^x$ **ve** $r(x) = e^{-x}$ **olacağından:**

$$V_1 = \pi \int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x})dx = \pi[\frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})|_0^1,$$
$$= \frac{\pi}{2}[(e^2 + e^{-2}) - (1+1)] = \frac{\pi(e^2-1)^2}{2e^2}.$$

b-) R**'nin** $x = 1$ **doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız?(**15 **PUAN.)**

Her hangi bir $x \in [0,1]$ **için** $p(x) = 1 - x$ **ve** $h(x) = e^x - e^{-x}$ **olacağından:**

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 (1-x)(e^x - e^{-x})dx = 2\pi[\int_0^1 (e^x - e^{-x})dx - \int_0^1 x(e^x - e^{-x})dx],$$
$$= 2\pi[(e^x + e^{-x})|_0^1 - (xe^x - e^x|_0^1) - (xe^{-x} - e^{-x}|_0^1),$$
$$= 2\pi[e + \frac{1}{e} - 2 - 0] = 2\pi\frac{(e-1)^2}{e}.$$