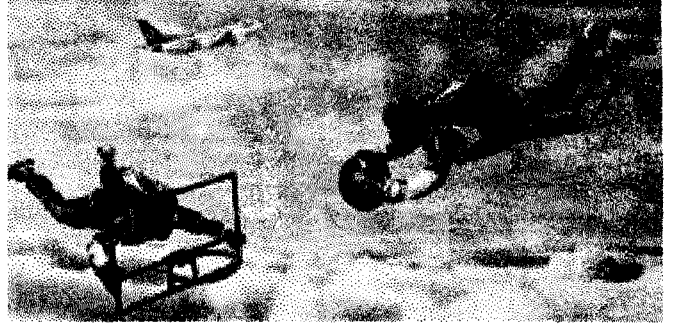


1-Bir reklam filminde basketbol topuyla bir paraşütcü 5000 m yükseklikten (ilk hızı sıfır olarak alınacaktır) aşağıya atlamaktadır. Paraşütcünün (basketbol topuyla birlikte) ağırlığı 100 kg, yerçekimi ivmesi  $9.81 \text{ m/s}^2$  ve basketbol topuna etki eden hava direnç katsayısı  $K_b=9,8 \text{ kg/s}$  dir. Paraşütcü 10 m/s limit hıza eriştiğinde başka bir paraşütcünün tuttuğu basketbol potasına smaç vuracaktır.



Ancak basketbol topu normal ağırlığında olduğunda aşağıya doğru paraşütcülerle aynı hızda düşmemektedir. Paraşütcülere etki eden hava direnç katsayısı  $K_p$  dir ve paraşütcü hızıyla orantılı olduğu bilindiğine göre,

- Paraşütcünün hareketinin diferansiyel denklemini bulunuz. (10 p)
- Paraşütcüye etkiye hava direnç katsayısını bulunuz. (10 p)
- Basketbol topunun minimum ağırlığını bulunuz. (10 p)

2- Üç farklı radyoaktif maddeye ait diferansiyel denklemler yandaki gibidir. Laplace dönüşümü kullanarak  $M_3(t)$ 'yi bulunuz. Burada  $M_0=5 \text{ kg}$ ,  $k_1=4$ ,  $k_2=3$ ,  $k_3=2$  olarak alınacaktır. (25 p)

$$\frac{dM_1}{dt} = -k_1 M_1$$

$$\frac{dM_2}{dt} = -k_2 M_2 + k_1 M_1$$

$$\frac{dM_3}{dt} = -k_3 M_2$$

$$M_1(0) = M_0, \quad M_2(0) = 0, \quad M_3(0) = 0$$

3-  $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$  diferansiyel denklemi çözünüz. (15p)

4-  $x' = 2x + 3y + t$  Lineer diferansiyel denklem sistemini  
 $y' = 4x - 2y + 1$  özdeğer yöntemi ile çözünüz. (30p)

NOT: Laplace Tablosu soru kağıdının arkasındadır, Hesap makinesi kullanılabilir. SÜRE 1 saat 15 dakika, Soru kâğıdı iade edilecektir.

BAŞARILAR,

Y.Doç.Dr. Ünal UYSAL

$\frac{kg \cdot m}{s^2}$   
 $\frac{m}{s}$

## Çözümler

1

a)  $m_T = 100 \text{ kg}$ ,  $v_{\text{lim}} = 10 \text{ m/s}$ ,  $F_D = K \cdot v$

$\downarrow$   
+  
 $x$

$$m_T \cdot g - (K_p + K_b) v = m_T \cdot \frac{dv}{dt}$$

b) - limit hıza ulaşıldığında  $\frac{dv}{dt} = 0$ , dolayısıyla

$$m_T \cdot g - (K_b + K_p) v_{\text{lim}} = 0$$

$$K_p = \frac{m_T \cdot g}{v_{\text{lim}}} - K_b = \frac{100 \cdot 9,81}{9,8} \approx \del{88,3} 9,8$$

$$K_p = 88,3 \text{ kg/s}$$

c) Topun  $v_{\text{lim}} = 10 \text{ m/s}$  hıza ulaşabilmesi için

$$m_b \cdot g = \del{K_b} K_b \cdot v_{\text{lim}} \text{ olmalıdır.}$$

$$\text{Buradan } m_b = \frac{9,8 \cdot 10}{9,81} \Rightarrow m_b \approx 10 \text{ kg}$$

$$W_b = 98,1 \text{ N}$$

② Laplace dönüşümü  $4/5$  sözüme gidelim

$$s \cdot M_1(s) - M_1(0) = -k_1^4 M_1(s)$$

$$s \cdot M_2(s) - M_2(0) = -k_2^3 M_2(s) + k_1^4 M_1(s)$$

$$s \cdot M_3(s) - M_3(0) = -k_3 M_2(s)$$

$$① \quad (s+4) M_1(s) = 5 \rightarrow M_1(s) = \frac{5}{s+4}$$

$$② \quad (s+3) M_2(s) = 4 \cdot \frac{5}{s+4} \rightarrow M_2(s) = \frac{20}{(s+3)(s+4)}$$

$$③ \quad s \cdot M_3(s) = -2 \frac{20}{(s+3)(s+4)}$$

$$M_3(s) = \frac{-40}{s(s+3)(s+4)}$$

$$M_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{5}{s+4} \right] = 5 \cdot e^{-4t}$$

$$M_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{20}{(s+3)(s+4)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{20}{s+3} - \frac{20}{s+4} \right]$$

$$= 20 e^{-3t} - 20 e^{-4t}$$

$$M_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-40}{s(s+3)(s+4)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ -\frac{10}{3s} + \frac{40}{3(s+3)} - \frac{10}{s+4} \right]$$

$$M_3(t) = -\frac{10}{3} + \frac{40}{3} e^{-3t} - 10 e^{-4t}$$

③ - 
$$\left. \begin{aligned} y &= x^r \\ y' &= r x^{r-1} \\ y'' &= r(r-1) x^{r-2} \end{aligned} \right\} \text{ dönüştürme uygulaması}$$

$$(r(r-1)x^{r-2}) \cdot x^2 - 3x(r x^{r-1}) + 4x^r = 0$$

$$x^r [(r-2)^2] = 0, \quad x^r \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$$(r-2)^2 = 0, \quad r_{1,2} = 2 \text{ (2 katlı kök)}$$

$$\boxed{y = c_1 x^2 + c_2 \ln|x| x^2}$$

④

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 16 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 4$$

$$x_h = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{4t}$$

Homojen sistemin ~~2. denkleminin~~ 1. denkleminin den

$$y = \frac{1}{3} (x' - 2x) = \frac{1}{3} [c_1 e^{-4t} + c_2 e^{4t}]' - \frac{2}{3} [c_1 e^{-4t} + c_2 e^{4t}]$$

$$y_h = -2c_1 e^{-4t} + \frac{2}{3} c_2 e^{4t}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = At + B \\ y_0 = Ct + D \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_0' = A \\ y_0' = C \end{array} \right\} \text{Homojen olmayan} \\ \text{Sistemde yarılar}$$

$$A = 2(At + B) + 3(Ct + D) + t$$

$$C = 4(At + B) - 2(Ct + D) + 1$$

Katsayılar eşitlenirse

$$\begin{array}{l} 2A + 3C = -1 \\ -A + 3B = 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2A + 3C = -1 \\ -A + 2B + 3D = 0 \\ 4A - 2C = 0 \\ 4B - C - 2D = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A = -\frac{1}{8}, B = -\frac{1}{4} \\ C = -\frac{1}{4}, D = \frac{1}{8} \end{array}$$

Dolayısıyla;

$$x(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{4}$$

$$y(t) = -2c_1 e^{-4t} + \frac{2}{3}c_2 e^{4t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}$$